Clasa a X-a

Interpretarea geometrică a numerelor complexe

prof. Carmen Mirela Alexa

PLANUL COMPLEX

Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, iar $i^2 = -1$.

Fiecărei perechi ordonate $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ îi corespunde un unic număr complex $z = a + bi$ şi reciproc, fiecărui număr complex $z = a + bi$ cu $a, b \in \mathbb{R}$ îi corespunde o singură pereche $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

PLANUL COMPLEX

Elementele mulțimii $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se reprezintă într-un plan raportat la un reper cartezian.

Astfel fiecărui număr complex $z=a+bi$ i se asociază un unic punct din plan şi reciproc.

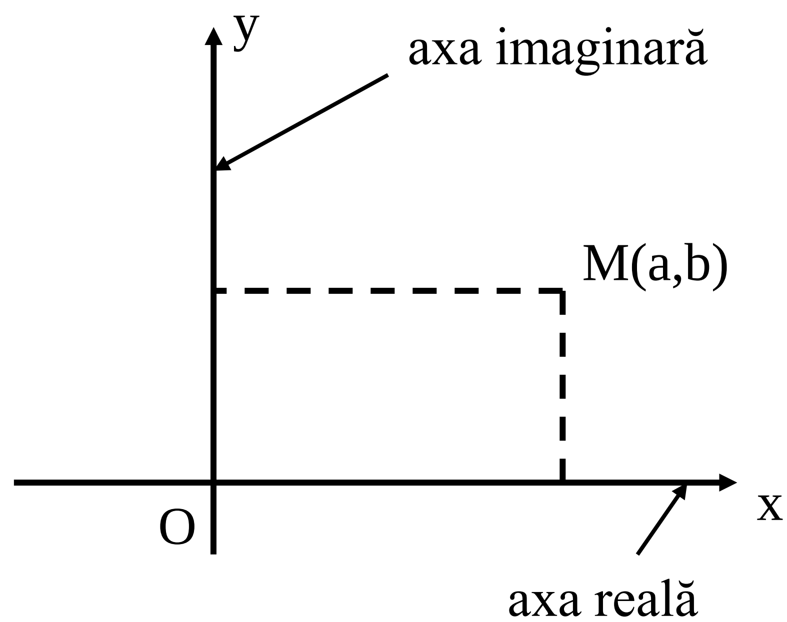
Planul raportat la un sistem ortogonal de axe se numeşte planul complex (planul lui Gauss)

PLANUL COMPLEX

$M(a,b)$ = imaginea geometrică a lui $\boldsymbol{z}$

$\boldsymbol{z}$ = afixul punctului $M(a,b)$

şi se notează $M(z)$



INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A MODULULUI UNUI NUMĂR COMPLEX

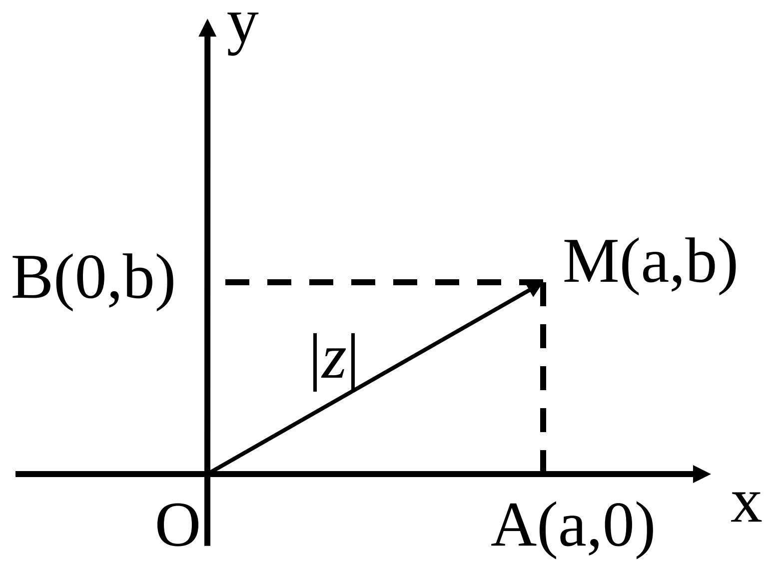
Modulul unui număr complex este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

În triunghiul dreptunghic AOM avem

$$OM^2 = OA^2 + MA^2,$$

adică

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$



Concluzii

1. Imaginea geometrică a unui număr complex $z = a + bi$ este un punct din plan $M(a, b)$.

2. Modulul unui număr complex reprezintă lungimea segmentului OM

$$|z| = |OM|.$$

Aplicații

1. Reprezentați în planul complex punctele M_1, M_2, M_3, M_4 având afixele $-1+2i$, $3+3i$, 2, respectiv $-4i$.

Soluții

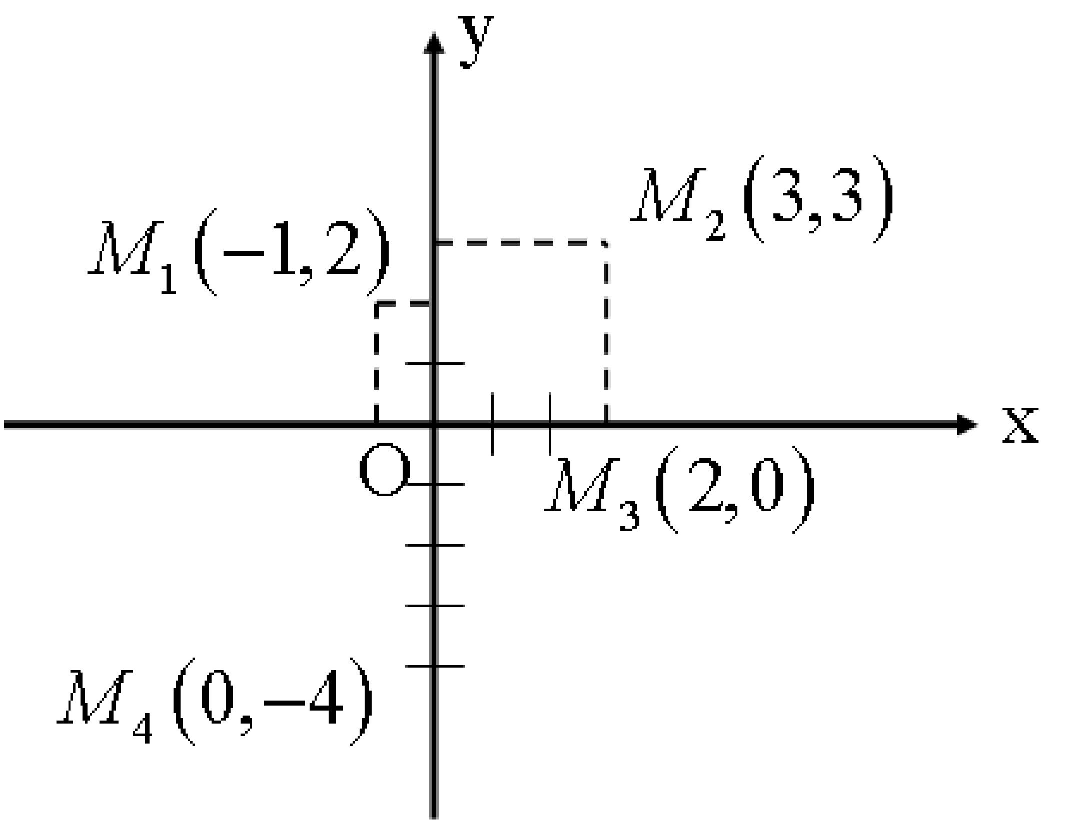
1. Fie

$z_1 = -1 + 2i$

$z_2 = 3 + 3i$

$z_3 = 2$

$z_4 = -4i$



Aplicații

2. Fie $M_1(2,-1)$, $M_2(-3,2)$. Să se determine afixele celor două puncte şi lungimile segmentelor OM_1 şi OM_2.

Soluții

2. Afixele punctelor date sunt:

$z_1 = 2 - i$, $z_2 = -3 + 2i$.

Lungimile segmentelor sunt:

$$OM_1 = |z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$OM_2 = |z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Aplicații

3. Să se determine mulțimea punctelor din plan de afix z pentru care:

a. $|z| = 1;$

b. $|z| \leq 2;$

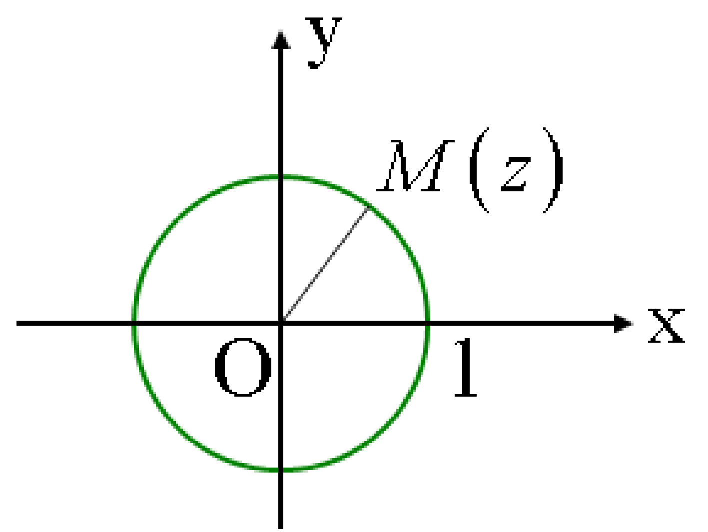
c. $1 \leq |z| \leq 3.$

Soluții

3. a) Fie $M(z)$ imaginea geometrică a lui z astfel încât $|z|=1$.

Atunci $OM = |z| = 1$,

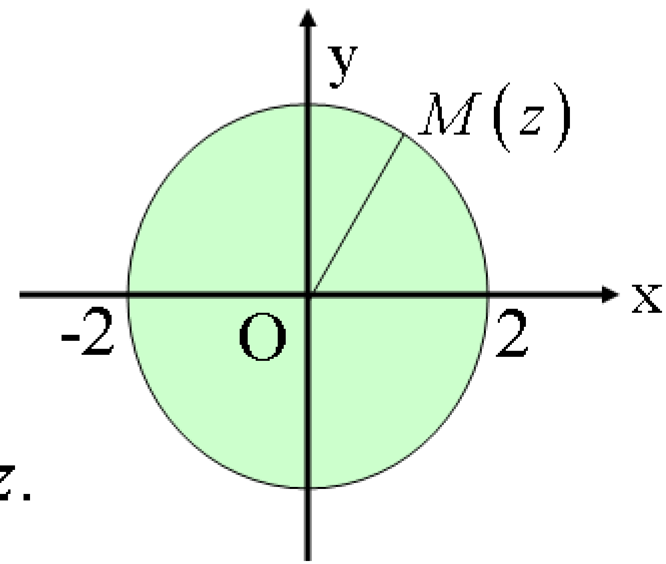
deci mulțimea punctelor



$M(z)$ din plan formează cercul $\mathscr{C}(O,1)$.

Soluții

3. b)



$|z| \leq 2 \Leftrightarrow OM \leq 2,$

unde M este imaginea lui z.

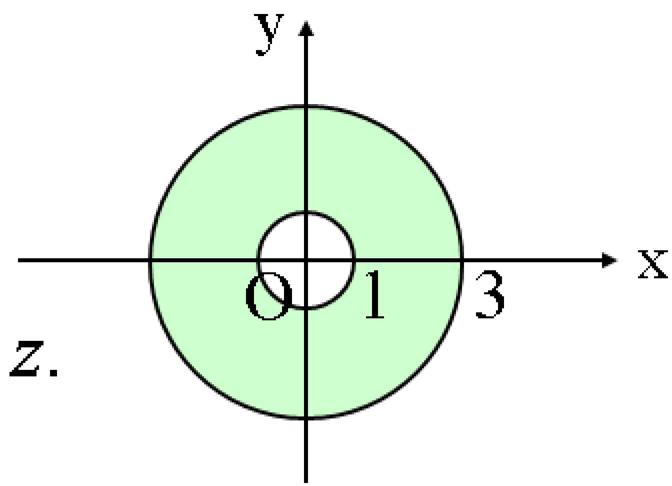
Deci, punctele $M(z)$ formează discul

$\mathscr{D}(O,2) = \mathscr{C}(O,2) \cup \mathscr{Int}\,\mathscr{C}(O,2).$

Soluții

3. c)

$1 \le |z| \le 3 \Leftrightarrow 1 \le OM \le 3,$



unde M este imaginea a lui z.

Deci, $M(z)$ formează coroana circulară

determinată de cercurile $\mathscr{C}(O,1)$ şi $\mathscr{C}(O,3)$,

inclusiv punctele cercurilor.

Imaginea geometrică a numerelor complexe – vectori

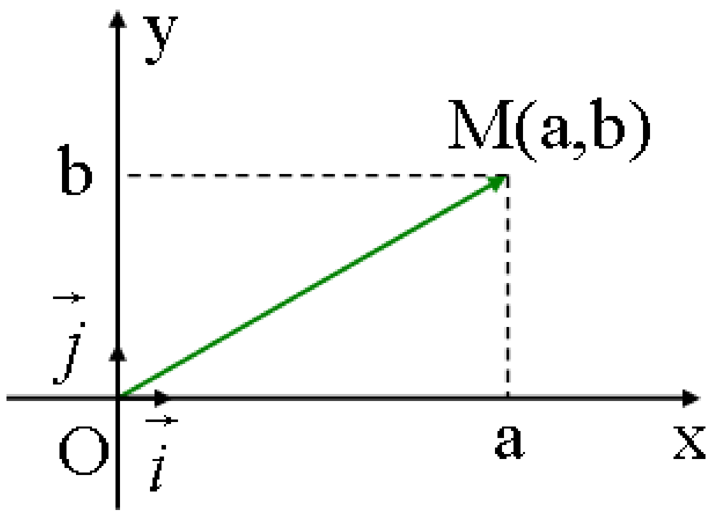
Fiecărui punct $M(a,b)$ din plan

îi corespunde

un singur vector $\overrightarrow{OM}$

cu $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$,

unde $\vec{i}, \vec{j}$ sunt versorii axelor Ox, Oy.



Imaginea geometrică a numerelor complexe – vectori

Atunci

lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$ este

lungimea segmentului OM.

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = |OM| = |z|$$

Interpretarea geometrică a adunării numerelor complexe

Fie $z_1 = a_1 + b_1 i$ şi $z_2 = a_2 + b_2 i$

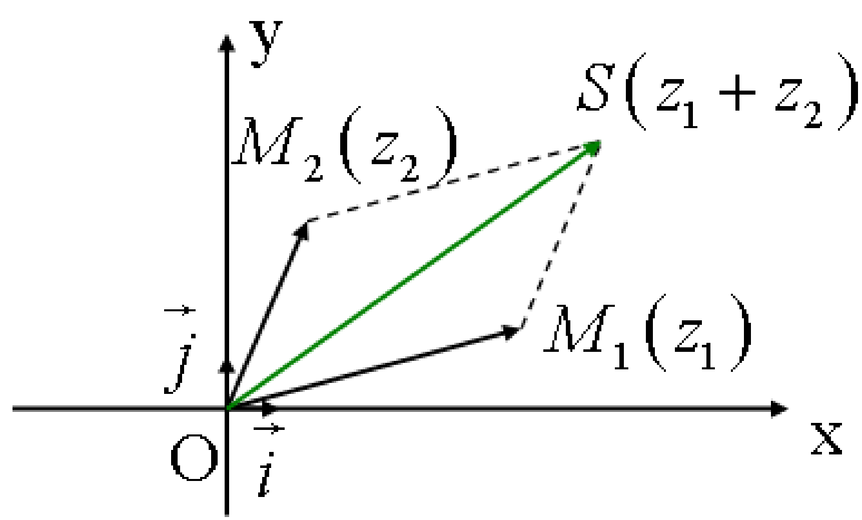
cu $M_1(z_1)$ şi $M_2(z_2)$ imaginile lor geometrice.

Atunci suma este $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Iar imaginea ei geometrică este

$$S(z_1 + z_2) = S(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Interpretarea geometrică a adunării numerelor complexe



Vectorial

$$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OS}$$

unde S este cel de-al patrulea vârf

al paralelogramului format de $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$.

Observații

1. În triunghiul OM_1S inegalitatea triunghiului ne dă $OS \le OM_1 + M_1S$, adică, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (inegalitatea lui Minkowski).

2. $|\overrightarrow{OS}| = |OS| = |z_1 + z_2|$ sau

$$|\overrightarrow{OS}| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

Interpretarea geometrică a scăderii numerelor complexe

Fie $z_1 = a_1 + b_1 i$ şi $z_2 = a_2 + b_2 i$ cu $M_1(z_1)$ şi $M_2(z_2)$ imaginile lor geometrice.

Diferența se poate scrie

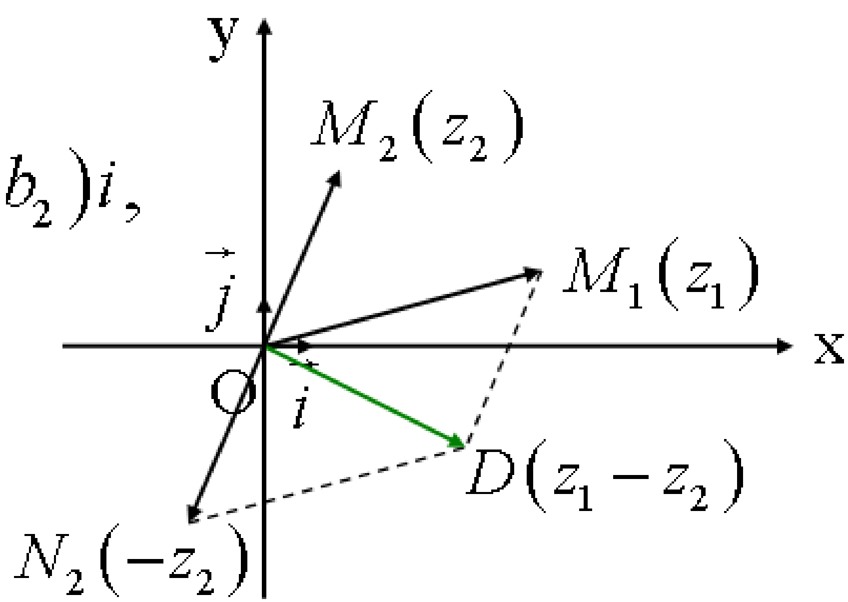
$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, unde

$-z_2$ are imaginea geometrică $N_2(-z_2)$, adică simetricul lui $M_2(z_2)$ în raport cu originea O.

Interpretarea geometrică a scăderii numerelor complexe

Diferența este

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$



iar imaginea ei geometrică este

$$D(z_1 - z_2) = D(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$$

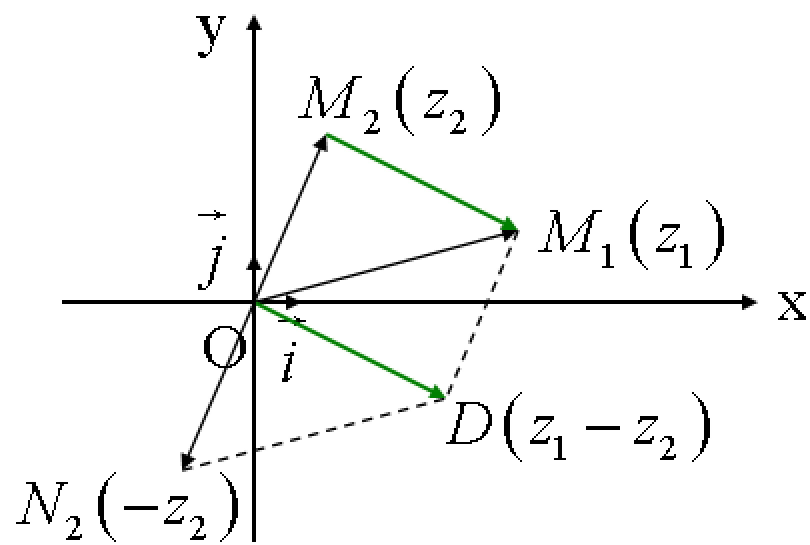
Observație

În paralelogramul ODM_1M_2 avem

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{M_2M_1}$.

Atunci

lungimea segmentului



$$|M_2M_1| = \left|\overrightarrow{M_2M_1}\right| = \left|\overrightarrow{OD}\right| = |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

Aplicații

4. Să se reprezinte în planul complex mulțimea punctelor de afix *z* care verifică condiția:

   a. $|z-2|=1;$

   b. $|z+1-i|>2;$

   c. $1<|z-1|<3.$

Soluție

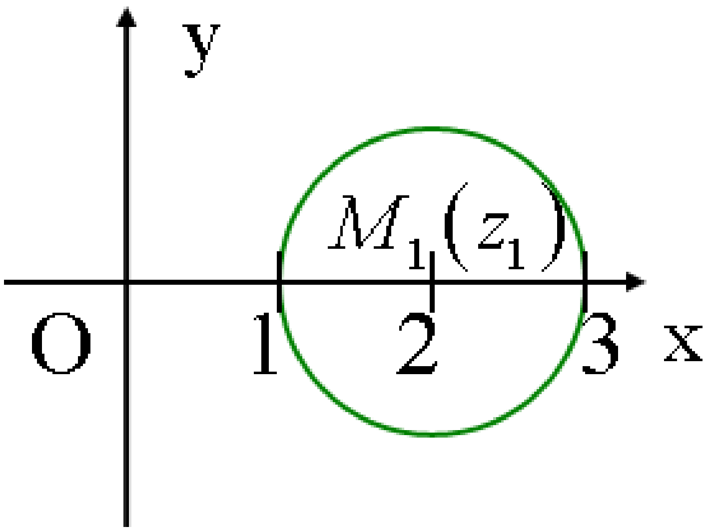
4. a) Fie $M(z)$ soluția condiției date și $M_1(2)$ imaginea lui $z_1 = 2$.

Așadar $|MM_1| = |z - z_1| = |z - 2| = 1$.

Deci, distanța de la M (variabil) la M_1 (fixat) este egală cu 1.

Soluție

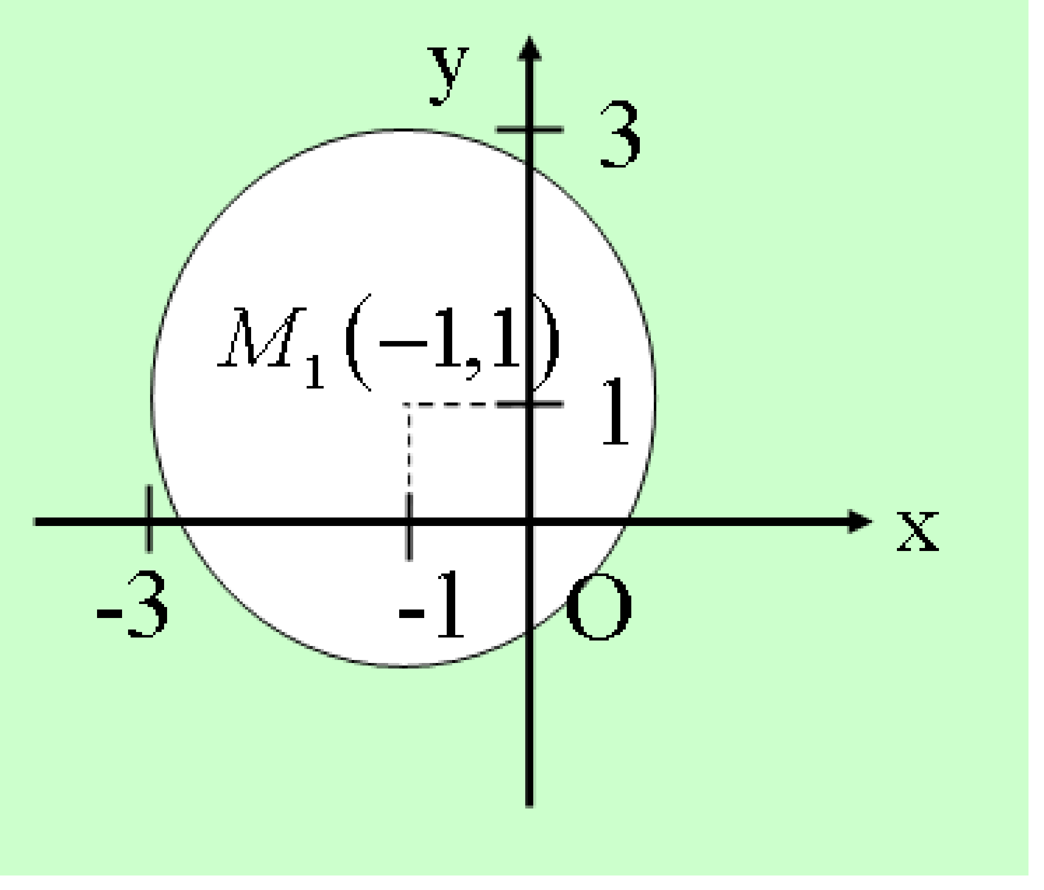
Rezultă că,
M descrie cercul
de centru $M_1(2,0)$
şi rază 1,
adică $\mathscr{C}(M_1,1)$.



Soluție

4.b) Fie $M(z)$ soluția şi $M_1(-1+i)$ imaginea lui $z_1=-1+i$. Aşadar $|MM_1|=|z-z_1|=|z+1-i|>2.$ Rezultă că, M descrie exteriorul cercului de centru $M_1(-1,1)$ şi rază 2, adică $\mathcal{E}xt\,\mathcal{C}(M_1,1).$

Soluție



Soluție

4. c) Fie $M(z)$ soluția și $M_1(-i)$ imaginea lui $z_1 = -i$. Așadar

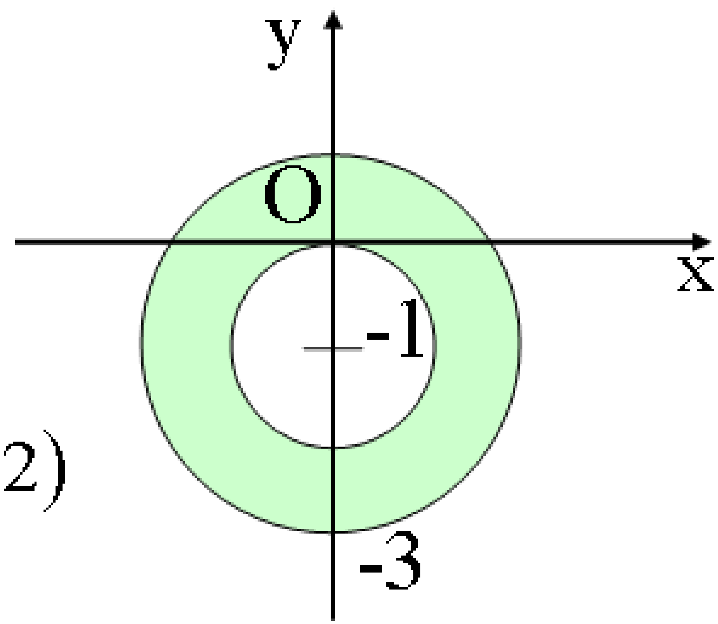
$|MM_1| = |z - z_1| = |z + i|$,

adică $1 < |MM_1| < 2$.

Rezultă că,

$$M \in \mathcal{E}xt\,\mathcal{C}(M_1, 1) \cap \mathcal{I}nt\,\mathcal{C}(M_1, 2)$$

unde $M_1(0, -1)$.



Aplicație

5. Fie $M_1(3,-1)$, $M_2(-2,3)$ şi M astfel încât $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM}$.

a. Determinați afixul lui M.

b. Calculați $\left|\overrightarrow{OM}\right|$.

Soluție

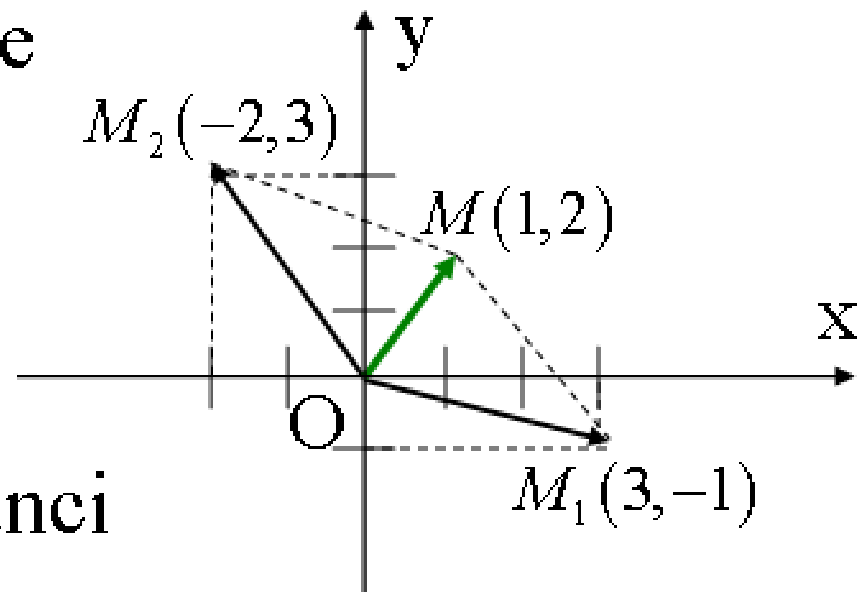
a) M_1 este imaginea geometrică a lui $z_1 = 3 - i$, iar M_2 a lui $z_2 = -2 + 3i$.
$\overrightarrow{OM}$ este suma vectorilor $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$, deci M este de afix
$M(z_1 + z_2) = M(3-2, -1+3) = M(1,2)$.

Soluție

Într-un reper cu baza $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$

vectorul $\overrightarrow{OM}$ se scrie

$\overrightarrow{OM} = \vec{i} + 2\vec{j}$.



b) Cum $M(1,2)$ atunci

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|OM\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Aplicație

6. Fie $A(1+3i)$, $B(3-i)$. Arătați că triunghiul OAB este dreptunghic isoscel.

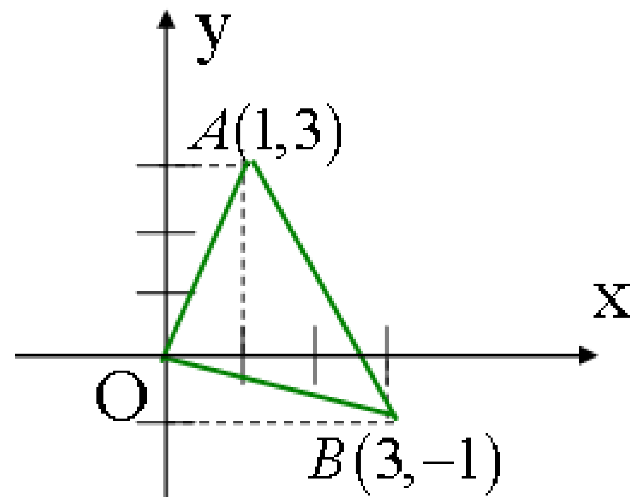
Soluție

$$|OA| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$|OB| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$|AB| = |z_A - z_B| = |(1+3i) - (3-i)|$$

$$|AB| = |-2+4i| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}.$$



Se observă că $|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2$, ceea ce înseamnă că teorema lui Pitagora se verifică, deci triunghiul OAB este dreptunghic isoscel.

Tema de casă

- Din manualul de Ganga: pag. 83, ex. 35 – 40
- Din culegerea de Burtea: pag. 29, ex. 1,2,3
- Din culegerea de Drăcea: Pag. 78, ex. 1a, 3